11/10/16.

Ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα 2 καταστάσεων

Έστω X_n η σ.δ. σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1\}$

Η σ.δ. έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα και την ιδιότητα της στασιμότητας (ομογενής Μ.Α.)

Πίνακας Πιθανοτήτων Μετάβασης ενός βήματος

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 \ (\text{ΜΕΛΛΟΝ}) & 1 \\ \hline (\text{ΠΑΡΟΝ})\ 0 & P_{00} & P_{01} \\ 1 & P_{10} & P_{11} \end{array}$$

$P_{00}+P_{01}=1$

$P_{10}+P_{11}=1$

~~(*) Κάθε~~

((*) Σε κάθε πίνακα μετάβασης τα στοιχεία των γραμμών αθροίζουν στη μονάδα)

(Άσκηση 29)

Μια εταιρία "....." $\to$ ΤΕΛΕΙΑ $=0$, ΕΛΛΑΤΩΜΑΤΙΚΑ $=1$. Έχει παρατηρηθεί ότι η ποιότητα κάθε ψυγείου εξαρτάται ~~άλλον~~ ~~απο~~ από το προηγούμενο (δηλ Μαρκοβιανή Ιδιότητα) και ότι ένα τέλειο ψυγείο ακολουθείται από ένα τέλειο με ~~πιθανό~~ πιθανότητα 3/4 ενώ ένα ελ. από ένα ελ. με πιθανότητα 1/3.

$P_{00}=3/4 \Rightarrow P_{01}=1/4$

$P_{11}=1/3 \Rightarrow P_{10}=2/3$

ΣΥΜΒΑΣΗ: $P=\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$.

Υποθ. ότι $\alpha+\beta\neq 0 \to P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ $\to$ ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΩ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.

$\alpha+\beta\neq 2$.

$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΤΥΧΑΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑΤΙ ΑΛΛΑΖΕΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΕΝΑΛΛΑΞ

1ο Να υπολ. η πιθανότητα η σ.δ. να βρίσκεται στην κατάσταση j : $j=0,1$ τη χρονική στιγμή n.

2ο) Να υπολ. η πιθανότητα η σ.δ. να μεταβεί από την κατάσταση i : $i=0,1$ στην κατάσταση j : $j=0,1$ σε n βήματα

3ο) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η σ.δ. να βρίσκεται στην κατάσταση j, $j=0,1$ μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα (η. οριακή πιθανότητα $n \to \infty$).

$\boxed{\text{Επίλυση 1ου}}$ Συμβ. με $P_j^{(n)} = P(X_n = j)$, $j=0,1$ δηλ.

$$P_0^{(n)} = P(X_n = 0) = P\left(\begin{matrix}\text{η σ.δ. να βρίσκεται στην} \\ \text{κατάσταση 0 τη χρ. στιγμή } n\end{matrix}\right)$$

$$P_1^{(n)} = P(X_n = 1) = P(\;-||-\;)$$

Συμβολίζω με $P^{(n)}$ το 2-διάστατο διάνυσμα $P^{(n)} = (P_0^{(n)} \; P_1^{(n)})$

Με βάση τον συμβολισμό που προηγήθηκε: $P^{(0)} = (P_0^{(0)} \; P_1^{(0)})$ παριστάνει τις πιθανότητες αρχικά να βρίσκομαι στην κατάσταση 0 ή 1.

(Π.χ. Είναι γνωστό ότι αρχικά οι πιθανότητες η σ.δ. να βρίσκεται σε μία από τις 2 καταστάσεις είναι ίσες $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} P_0^{(0)} = P_1^{(0)} \\ P_0^{(0)} + P_1^{(0)} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_0^{(0)} = P_1^{(0)} = 0.5$$)

$$P_0^{(n)} = P\left(\begin{matrix}\text{να βρίσκομαι τη χρ. στιγμή } n-1 \text{ στην κατάσταση 0 κι } 0 \to 0 \text{ στο επόμενο βήμα} & A_1 \\ \text{να βρίσκομαι τη } n-1 \text{ χρ. στιγμ. στην κατάσταση 1 και } 1 \to 0 \text{ στο επόμενο βήμα} & A_2\end{matrix}\right) =$$

$$= P(A_1 \cup A_2) \xrightarrow{A_1 \cap A_2 = \emptyset} P(A_1) + P(A_2) =$$

$$= P\left(\begin{matrix}\text{να βρίσκομαι στο 0} \\ \text{τη χρ. στιγμή } n-1 \\ \text{κι } 0 \to 0 \text{ στο επόμενο βήμα}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}-||- \; 1, n-1 \\ \text{κι } 1 \to 0 \; n\end{matrix}\right) =$$

ανεξαρτησία λόγω Μαρκοβιανής

$$= P_0^{(n-1)} \cdot P_{00} + P_1^{(n-1)} \cdot P_{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0^{(n)} = \left(P_0^{(n-1)} \;\; P_1^{(n-1)}\right) \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \end{pmatrix}}$$

$$P_1^{(n)} = \left(\overbrace{\begin{matrix} \text{να βρίσκεται στο 0 τη χρ. στ. } n-1 \\ \text{και } 0 \to 1 \text{ στο επόμενο βήμα} \end{matrix}}^{A_3} \cup \underbrace{\begin{matrix} -\text{''}- \ 1,\ n-1, \text{ και } 1 \to 1 \text{ στο} \\ \text{επόμενο βήμα} \end{matrix}}_{A_4} \right) = P(A_3 \cup A_4) =$$

$$\overset{A_3 \cap A_4 = \emptyset}{=} P(A_3) + P(A_4) = P\left(\begin{matrix}\text{να βρ. στο 0 στο } n-1 \\ 0 \to 1 \ \cap \text{ στο επ. βήμα}\end{matrix}\right) + P(A_4) =$$

$$= p_0^{(n-1)} \cdot p_{01} + p_1^{(n-1)} \cdot p_{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1^{(n)} = \left(p_0^{(n-1)} \ \ p_1^{(n-1)}\right) \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{11} \end{pmatrix}}.$$

Συγκεντρωτικά

$$\left(p_0^{(n)} \ \ p_1^{(n)}\right) = \left(p_0^{(n-1)} \ \ p_1^{(n-1)}\right) \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P} = p^{(n-2)} \cdot P \cdot P = \ldots = \cancel{p^{(0)} \ p^{(1)}}$$

$$= p^{(0)} \cdot P^n$$

Άρα $\boxed{p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n} \Rightarrow \left(p_0^{(n)} \ p_1^{(n)}\right) = \left(p_0^{(0)} \ p_1^{(0)}\right) \cdot P^n$

Εύρεση του P^n όταν ο P είναι ο $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$.

Θα γράψουμε τον P στη μορφή $P = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Q^{-1}$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του P και Q ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$. Τότε $P^n = Q \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} Q^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + (\alpha+\beta-2)\lambda + (1-\alpha-\beta) = 0$$

$$\Delta = (\alpha+\beta-2)^2 - 4(1-\alpha-\beta) = \overline{(\alpha+\beta)^2}^{\neq 0} > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha+\beta-2) \pm (\alpha+\beta)}{2} = \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow 1-(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (1-\alpha) q_{11} + \alpha q_{21} = q_{11} \\ \beta q_{11} + (1-\beta) q_{21} = q_{21} \end{cases} \rightarrow$$

$\Rightarrow q_{11} = q_{21}$. Έστω $\boxed{q_{11} = q_{21} = 1}$

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = (1-\alpha-b)\begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)q_{12} + \alpha \cdot q_{22} = (1-\alpha-b)q_{12} \\ b q_{12} + (1-b)q_{22} = q_{22}(1-\alpha-b). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{22} = -\frac{b}{\alpha} q_{12}}$$

Έστω $q_{12} = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{q_{22} = -b}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -b \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1-\alpha-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -b \end{bmatrix}^{-1}$$

Είναι: $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{bmatrix} -b & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{(\alpha+b)} \begin{bmatrix} -b & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b}{\alpha+b} & \frac{\alpha}{\alpha+b} \\ \frac{1}{\alpha+b} & \frac{-1}{\alpha+b} \end{bmatrix}$$

άρα $$P^n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1-\alpha-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b}{\alpha+b} & \frac{\alpha}{\alpha+b} \\ \frac{1}{\alpha+b} & \frac{-1}{\alpha+b} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow P^n = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{b+\alpha(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b}}_{x} & \underbrace{\frac{\alpha-\alpha(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b}}_{y} \\ \underbrace{\frac{b-b(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b}}_{z} & \underbrace{\frac{\alpha+b(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b}}_{w} \end{bmatrix}.$$

$$P^{(n)} = P^{(0)} \cdot P^n$$

$$\left(P_0^{(n)} \quad P_1^{(n)}\right) = \left(P_0^{(0)} \quad P_1^{(0)}\right) \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$P_0^{(n)} = P_0^{(0)} \cdot x + P_1^{(0)} \cdot z$$

$$P_1^{(n)} = P_0^{(0)} \cdot y + P_1^{(0)} \cdot w$$

// Μέχρι εδώ η απόδειξη του 1ου ερ.

2ο) $P_{ij}^{(n)} = P$(να μεταβώ από το $i \to j$ σε n βήματα), $i=0,1$, $j=0,1$

Άρα πρέπει να προσδιορίσω των $P_{00}^{(n)}$, $P_{01}^{(n)}$, $P_{10}^{(n)}$, $P_{11}^{(n)}$

$$P_0^{(n)} = P\left(\begin{array}{l} \underbrace{\text{αρχικά να βρίσκομαι στο } 0 \text{ κ' } 0\to 0 \text{ σε n βήματα}}_{A5} \\ \text{ή/ή} \\ \underbrace{\text{-"- \quad -"- \quad } 1 \text{ κ' } 1 \to 0 \text{ -"-}}_{A6} \end{array} \right)$$

άρα $P_0^{(n)} = P(A_5 \cup A_6) \xlongequal{A_5 \cap A_6 = \emptyset} P(A_5) + P(A_6) = P_0^{(0)} \cdot P_{00}^{(n)} + P_1^{(0)} \cdot P_{10}^{(n)}$

$$P_1^{(n)} = \left(\begin{array}{l} \underbrace{\text{αρχικά να βρίσκομαι στο } 0 \text{ κ' } 0\to 1 \text{ σε n βήματα}}_{A7} \\ \text{ή} \\ \underbrace{\text{-"- \quad -"- \quad } 1 \text{ κ' } 1 \to 1 \text{ -"-}}_{A8} \end{array} \right) =$$

$= P(A7 \cup A8) = P(A7) + P(A8) = P_0^{(0)} \cdot P_{01}^{(n)} + P_1^{(0)} \cdot P_{11}^{(n)}$

άρα
$$\left.\begin{array}{l} P_0^{(n)} = \overbrace{\begin{pmatrix} P_0^{(0)} & P_1^{(0)} \end{pmatrix}}^{p^{(0)}} \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} \end{pmatrix} \\ P_1^{(n)} = \begin{pmatrix} P_0^{(0)} & P_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{01}^{(n)} \\ P_{11}^{(n)} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{(P_0^{(n)}\ P_1^{(n)})}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P_0^{(n)} & P_1^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^{(0)} & P_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Στην προηγ. απόδ. δείξαμε ότι: $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$

$$\begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{pmatrix} = P^n$$

3ο) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} P_j^{(n)} = \Pi_j$, $j=0,1$, με $\Pi_0 + \Pi_1 = 1$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Οι οριακές πιθανότητες/πιθανότητες σε στατιστική ισορροπία, υπάρχουν όταν το πλήθος των καταστάσεων είναι πεπερασμένο.

$$\pi_0 = \lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)} \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} P_{10}^{(n)} = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$$

$$\pi_1 = \lim_{n\to\infty} P_{01}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$